Correction des exercices : Equations différentielles du 1^er^ordre

Exercice 1 :

(E1) : $(1+t^2)y' + y = 0$

(E1) est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 homogène.

Une primitive de $t \rightarrow \frac{-1}{1+t^2}$ est $t \rightarrow -\arctan(t)$. Les solutions de (E1) sont les fonctions **$y(t) = Ce^{-\arctan(t)}$ avec $C \in \mathbb{R}$.**

Exercice 2 :

(E2) : $3\cos(t)y' + \sin(t)y = 0 \quad \forall t \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

Déterminer les solutions de (E2) qui vérifient la condition initiale **$y\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1$**

(E2) est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 homogène.

Une primitive sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ de $t \rightarrow -\frac{\sin(t)}{3\cos(t)}$ est $t \rightarrow \frac{1}{3}\ln(\cos(t))$

Les solutions de (E2) sont les fonctions y définies par : $\forall t \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

$y(t) = Ce^{\frac{1}{3}\ln(\cos(t))} = C\sqrt[3]{\cos(t)}$ avec $C \in \mathbb{R}$.

On détermine C de sorte que $y\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1$

$C\sqrt[3]{\frac{1}{2}} = 1$

$C = \sqrt[3]{2}$

La solution de (E2) sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ qui vérifie la condition initiale est la fonction y définie par : $\forall t \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\quad$ **$y(t) = \sqrt[3]{2\cos(t)}$**

Exercice 3 :

(E3) ty' + 2y = ln(t) $\forall t \in]0;+\infty[$

(E3) est une équation différentielle linéaire d'ordre 1.

Une primitive de t→ $-\frac{2}{t}$ sur $]0;+\infty[$ est la fonction t→ $-2\ln(t)$

Les solutions de l'équation différentielle homogène associée sont les fonctions y définies par : $\forall t \in]0;+\infty[$ y(t) = $Ce^{-2\ln(t)}$ = $\frac{C}{t^2}$ avec C∈ $\mathbb{R}$

On cherche une solution particulière y_p de (E) sous la forme $y_p(t)$ = $\frac{C(t)}{t^2}$ avec C dérivable.

On remplace dans (E3) et on obtient : t× $\frac{C'(t)}{t^2}$ = ln(t)

C(t) = $\int t ln(t) dt$

Par intégration par partie, on obtient : C(t) = $\frac{t^2\ln(t)}{2} - \int \frac{t}{2}$

C(t) = $\frac{t^2\ln(t)}{2} - \frac{t^2}{4}$ convient.

$y_p(t)$ = $\frac{\ln(t)}{2} - \frac{1}{4}$

Les solutions de (E3) sont les fonctions y définies par :

$\forall t \in]0;+\infty[$ **y(t) =** $\frac{C}{t^2} + \frac{\ln(t)}{2} - \frac{1}{4}$ **avec C∈** $\mathbb{R}$

Exercice 4 :

(E4) : y' + ty = tsh(t) + ch(t)

$y_p(t)$ = sh(t) définit une solution de (E4)

Donc les solutions de (E4) sont les fonctions y définies par :

$\forall t \in \mathbb{R}$ $y(t) = Ce^{-\frac{t^2}{2}} + sh(t)$